# Mathematik

| | |
|---|---|
| **Notwendige Vorkenntnisse für die Einführungsphase** | Funktionsbegriff, Darstellungsformen von Funktionen beherrschen und anwenden können, unabhängige und funktional abhängige Variable erkennen.<br><br>Lineare Funktionen, Funktionsgleichung aus Graph ermitteln, Steigungsdreieck auswerten, aus Kenntnis der Funktionsgleichung den Graph zeichnen.<br><br>Algebraische Grundkenntnisse: Termumformungen, Auflösung von Gleichungen, rechnerische und TInspire-basierte Lösungsmethoden quadratischer Gleichungen anwenden<br><br>Umgang mit dem eingeführten Taschenrechner<br><br>Grundkenntnisse zu Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen<br><br>Grundlegende Kenntnisse der Bruchrechnung |
| **Methodik, Arbeitstechnik** | zunächst Grundfertigkeiten, die in E-Phase vertieft werden!<br><br>Eigenständige Arbeit beherrschen<br><br>angemessene Ausarbeitung und Dokumentation von Arbeitsaufträgen<br><br>Eigenständiger Umgang mit dem Lehrbuch<br><br>Umgang mit dem in der E-Phase eingeführten TInspire: Erstellung und Speicherung von Dokumenten, Menüsteuerung anwenden können, grundlegende Berechnungen beherrschen, Funktionen erstellen und bearbeiten können<br><br>Mündliche und schriftliche Präsentationen beherrschen<br><br>Angemessener Gebrauch der Fachsprache<br><br>Angemessene Rechtschreibung und Grammatik der deutschen Sprache |
| **Fachkenntnisse am Ende der Einführungsphase und notwendige Voraussetzungen für die Qualifikationsphase** | Erweiterung linearer und quadratischer Funktionen zu ganzrationalen Funktionen<br><br>Verschiebung/Streckung von Funktionsgraphen, Manipulation des Funktionsterms: $f(x) \rightarrow a \cdot f(b \cdot (x-c)) + d$<br><br>Erweiterung des Steigungsbegriffs von Funktionen |

| | |
|---|---|
| | Lokale und mittlere Steigung und Änderungsrate<br><br>Techniken der Differentialrechnung (Ableitungsregeln inkl. Der vereinfachten Kettenregel, Funktionsuntersuchungen, Extremalaufgaben)<br><br>Vertiefung zu Exponentialfunktionen: Wachstumsprozesse, Ableitung von Exponentialfunktionen, die e-Funktion als spezielle Exponentialfunktion<br><br>Vertiefung zu trigonometrischen Funktionen<br><br>Eigenständige Bearbeitung komplexer und themenübergreifender Aufgaben |

**Beispielaufgabe einer Funktionsuntersuchung in der E-Phase:**

Untersuchen Sie die Eigenschaften der ganzrationalen Funktion $f$ mit $f(x) = -2x^3 + x^2 + 4x$.
Verwenden Sie die im Unterricht erarbeiteten Kriterien der Analysis und dokumentieren Sie Ihre Überlegungen durch vollständige Begründungen. Zeichnen Sie abschließend den Graphen der Funktion.

Bemerkungen:

Funktionsuntersuchungen dienen dazu, grundlegende Eigenschaften einer Modellfunktion zu einem realen Prozess zu gewinnen. Die erarbeiteten mathematischen Techniken werden zunächst an ganzrationalen Funktionen, die sehr häufig in Anwendungen auftreten, erprobt. Sie lassen sich aber auch auf andere Funktionstypen (z.B. Exponential- und trigonometrische Funktionen) anwenden.

Die hier gestellte Standard-Beispielaufgabe erweitert die Funktionsuntersuchungen quadratischer Funktionen aus der Sekundarstufe I (Öffnungsverhalten quadratischer Funktionen, Nullstellen, Lage des Scheitelpunktes). Das Öffnungsverhalten wird jetzt durch das Globalverhalten ersetzt, Scheitelpunkte werden verallgemeinert als Extrempunkte untersucht. Als eigenständige Untersuchungsgegenstände treten die Symmetrie und Wendepunkte hinzu.

**Lösung**

1. **Symmetrie**
   Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung (0|0) vor, da sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von x im Funktionsterm vorkommen. Somit gelten die Bedingungen $f(x) = f(-x)$ und $f(x) = -f(-x)$ nicht.

2. **Nullstellen**
   $f(x) = 0 \Rightarrow -2x^3 + x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow$
   $x \cdot \left(-2x^2 + x + 4\right) = 0$
   Ein Produkt ist Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Daraus folgt:
   $x_1 = 0 \qquad oder$
   $-2x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow$
   $$x_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \approx 1{,}686 \qquad oder \qquad x_3 = \frac{1-\sqrt{33}}{4} \approx -1{,}186$$

Entweder ist obige quadratische Gleichung rechnerisch zu lösen oder eine graphische Lösung mittels TInspire zu dokumentieren. Es kann auch der TInspire-solve-Befehl benutzt werden (das Vorgehen muss dokumentiert werden).

### 3. Globalverhalten

Führender Term: $-2x^3$. Daraus folgt wegen $f(x) = -2x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2}\right)$:

$f(x) \to +\infty \quad (x \to -\infty)$ und $f(x) \to -\infty \quad (x \to +\infty)$.

### 4. Extrempunkte

$f'(x) = -6x^2 + 2x + 4 \qquad f'(x) = 0 \qquad -6x^2 + 2x + 4 = 0$.

Gleichung rechnerisch oder mit TInspire lösen (Lösungsmethode beschreiben, s.o.). Es folgt:

$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{2}{3} \approx -0{,}67$

Jetzt <u>entweder</u> das Vorzeichenwechselverhalten (VZW) von *f'* untersuchen <u>oder</u> das *f''*-Kriterium verwenden. Hier wird das *f''*-Kriterium skizziert:

$f''(x) = -12x + 2 \Rightarrow$

$f''(1) = -10 < 0 \Rightarrow \qquad HP(1 \mid f(1) = 3)$

$f'' = -10 < 0 \Rightarrow \qquad HP(1 \mid f(1) = 3)$

$f''(-0{,}67) = +10 > 0 \Rightarrow \qquad TP(-0{,}67 \mid f(-0{,}67) \approx -1{,}63)$

### 5. Wendepunkte

$f''(x) = -12x + 2 \qquad f''(x) = 0 \qquad -12x + 2 = 0 \Rightarrow x_w = \frac{1}{6}$

Jetzt <u>entweder</u> VZW von *f''* untersuchen <u>oder</u> *f'''*-Kriterium verwenden. Hier *f'''*-Kriterium:

$f'''(x) = -12 \Rightarrow f'''(1/6) = -12 \neq 0 \Rightarrow WP\left(\frac{1}{6} \mid f\left(\frac{1}{6}\right) \approx 0{,}685\right)$

### 6. Graph